

MODELLIERUNG EINES ELASTISCHEN KONTAKTES IN EINEM MKS-SYSTEM

Autor: Sten Währisch

Dresden: 26.05.2010

Inhalt

1	Einleitung	3
2	Übersicht zu Kontaktmodellen	5
2.1	3D Festkörpermodelle	5
2.2	2D Oberflächenmodelle	5
2.3	1D Kontaktmodelle	5
2.4	Vergleich der Kontaktmodelle	5
3	Beschreibung eines elastischen Kontaktes	8
3.1	Normalkontakt.....	8
3.2	Tangentialkontakt.....	9
3.2.1	Tangentialkontakt ohne Gleiten.....	10
3.2.2	Tangentialkontakt mit Gleiten	11
4	Abbildung des elastischen Kontakts im MKS-System	12
4.1	Normalkontakt.....	12
4.2	Tangentialkontakt.....	12
5	Zusammenfassung	14
	Literatur	15

1 Einleitung

Mechanische Systeme mit Reibung und Stößen treten in der Praxis in vielfältiger Form auf, wobei deren Verhalten aufgrund von toleranzbedingtem Spiel, Prellen, Stick-Slip und anderen Effekten nur schwer vorhersagbar ist. Die grundlegende Schwierigkeit bei der Behandlung derartiger Systeme mit zeitvarianter Topologie liegt in der Natur der Kontaktgesetze mit geknickten und unstetigen Kennlinien bzw. in der wechselnden Anzahl der Bewegungsmöglichkeiten. Ein konkretes Beispiel dafür ist das Coulombsche Reibproblem. Dessen Kennlinie zeigt, dass es in der Natur Kraftgesetze gibt, die sich nicht in Form eines eindeutigen funktionalen Zusammenhangs beschreiben lassen und deshalb mengenwertig sind. Stick-Slip Phänomene können beispielsweise nur dann hinreichend genau modelliert werden, wenn die Unstetigkeit in der Reibkraftkennlinie bei verschwindend kleiner Gleitgeschwindigkeit mathematisch entsprechend abgebildet wird [Sti01].

Bei den Methoden zur Behandlung von Stoßprozessen können grundsätzlich kontinuumsmechanische Ansätze und Starkkörperansätze unterschieden werden.

Starrkörperstöße sind Vorgänge, die auf Impulsebene erklärt sind. Ein Verzicht auf die klassische Modellierung lokaler Kontaktnachgiebigkeiten eliminiert sehr hohe Systemfrequenzen und reduziert somit die Rechenzeit. Ist eine ideale Starrkörperannahme zu rechtfertigen, legt man die Gesetze für ebene Kontakte zugrunde:

- Kontaktgesetz in Normalenrichtung auf Lageebene (Normalenabstand)
- Kontaktgesetz in Tangentialrichtung auf Geschwindigkeitsebene

Die Ansätze zur Behandlung von Starrkörperstößen basieren auf den drei Stoßhypothesen

- Newton (Normalgeschwindigkeit),
- Poisson (Kraftstoß unterteilt in Kompressions- und Expansionsphase) oder
- Energie (verbrauchte kinetische Energie).

Das Verfahren nach Poisson bietet wegen der Aufspaltung in Kompressions- und Expansionsphase gerade im Hinblick auf Mehrfachstöße universellere Möglichkeiten als das Newtonsche Gesetz. GLOCKER erweitert das Poisson'sche Stoßgesetz auf Mehrfachstöße und tangentialreversibles Verhalten. MOREAU formuliert ein zum Newtonschen Stoßgesetz verwandtes Kontaktgesetz [Sti01].

Bei der Berechnung dynamischer Systeme mit Starrkörperbindungen wählen PFEIFFER/GLOCKER grundsätzlich folgende Vorgehensweise. Ausgehend von einer Formulierung der Kontaktgesetze auf Beschleunigungsebene werden die Kontaktkräfte berechnet und die Bewegungsgleichung mit einem numerischen Integrator gelöst. Durch die Transformation auf Beschleunigungsebene wird die uneingeschränkte Gültigkeit aufgegeben. Weiterhin müssen aufwendige Korrekturmaßnahmen ergriffen werden, um den numerischen Drift zu kompensieren.

MOREAU hingegen diskretisiert zuerst die Bewegungsgleichung auf Geschwindigkeitsebene, löst dann die Kontaktgesetze ebenfalls auf Geschwindigkeitsebene und schließt den Algorithmus mit der Berechnung der Systemlagen anhand einer Euler-Diskretisierung ab [Sti01].

STIEGELMEYR entwickelt einen Algorithmus für ebene Kontaktprobleme, der die Kontaktgesetze auf der physikalischen motivierten Lage- und Geschwindigkeitsebene löst, ohne Korrekturmaßnahmen auskommt (selbsttätige Driftkorrektur) und die physikalisch sinnvolle Abbildung sich schließender Kontakte und Selbsthemmungsphänomene in Form plastischer Stöße erlaubt.

Alle Gesetzmäßigkeiten auf Basis von Starrkörperansätzen sind aber nur Näherungen. Genauere Ergebnisse erhält man durch eine Modellierung der Verformung während des Stoßvorganges, mit Hilfe der Kontinuumsmechanik unter Berücksichtigung der Stoßwellenausbreitung. Dies ist jedoch sehr kompliziert und rechenaufwändig, so dass der Fehler der Stoßhypothese für viele technische Anwendungen in Kauf genommen wird [STM09].

Im Folgenden werden die wichtigsten Kontaktmodelle vorgestellt und deren Eignung für den Einsatz in einem MKS-System beurteilt.

2 Übersicht zu Kontaktmodellen

Dieses Kapitel soll einen Überblick zu Methoden der Kontaktmodellierung geben. Eine sinnvolle Unterteilung der Kontaktmodelle bietet ihre Dimension:

- 3D Festkörpermodelle (Elastizitätstheorie, FEM)
- 2D Oberflächenmodelle (Halbraumapproximation und Randschichtmodell)
- 1D Kontaktmodelle (Kraftelement, Starrkörperkontakt)

2.1 3D Festkörpermodelle

Kontaktkräfte treten an der Oberfläche von festen Körpern auf und befinden sich im Gleichgewicht mit deren inneren Spannungen. Der klassische Ansatz zur Analyse von Berührungsvorgängen basiert daher auf der Festkörpermechanik. Die grundlegenden Zusammenhänge bei der Verformung elastischer Körper beschreibt die Elastizitätstheorie. Für kontaktmechanische Untersuchungen werden darüber hinaus geeignete Gesetzmäßigkeiten für die Übertragung von Spannungen im Berührgebiet benötigt, welche als Randbedingungen eingehen.

2.2 2D Oberflächenmodelle

Während bei 3D Kontaktmodellen die beteiligten Körper in ihrer Gesamtheit beschrieben werden, beschränken sich diese Modelle auf die Betrachtung ihrer Oberflächen (ebenes Kontaktgebiet). Dabei geht man stets davon aus, dass das Körperinnere als unbeteiligt bzw. starr betrachtet werden kann, und dynamische Effekte aufgrund von Beschleunigungen bei der Verformung werden vernachlässigt.

2.3 1D Kontaktmodelle

Beim dritten Modellansatz wird der Kontakt auf eindimensionale physikalische Gesetzmäßigkeiten reduziert. Voraussetzung für dessen Anwendung ist ein repräsentativer Angriffspunkt mit zugehöriger Wirkrichtung.

2.4 Vergleich der Kontaktmodelle

In den vorangegangenen Abschnitten wurden verschiedene Kontaktmodelle vorgestellt. HIPPMNANN vergleicht diese hinsichtlich ihrer Eignung für die Mehrkörpersimulation (MKS).

„Das Bewertungskriterium Qualität gibt an, wie nahe ein Modell den physikalischen Phänomenen realer Kontaktvorgänge kommt. Die Effizienz steht für den Aufwand der numerischen Lösung und steht in engem Zusammenhang mit der Komplexität, die aber

auch Interpretierbarkeit der Ergebnisse sowie Implementierungsaufwand und Wartbarkeit eines Programmcodes entscheidend beeinflusst. Mit der Robustheit wird die numerische Stabilität, aber auch die Empfindlichkeit gegenüber kritischen Parametern oder sonstigen Daten beurteilt. Und Flexibilität meint die Breite des Anwendungsbereichs eines Modells.

Tabelle 2.1: Bewertung der Kontaktmodelle hinsichtlich Implementierung in MKS-Programme

	Kontinuumsmechanik					Starrkörper
	3D		2D		1D	
Bewertung	Elastizitätstheorie	FEM	Halbraumapproximation	Randschichtmodell	Kraftelemente	Starrkörperkontakt
Qualität	++	++	+	o	-	-
Effizienz	++	--	-	o	++	++
Komplexität	o	--	o	+	++	o
Robustheit	++	o	o	+	-	--
Flexibilität	--	++	+	+	-	-

Die Elastizitätstheorie stellt die Grundlage aller anderen Modelle mit Ausnahme des Starrkörperkontakts dar. Analytische Methoden erlauben für wenige, sehr spezielle Probleme die Bestimmung der Verformungs- und Spannungsfelder in als linear elastisch angenommenen, kontaktierenden Körpern in geschlossener Form. Dieser Ansatz lässt sich aufgrund der mangelnden Flexibilität jedoch nicht als allgemeines Kontaktmodell in der Mehrkörpersimulation anwenden. Auch die Finite-Elemente-Methode erscheint in dieser Hinsicht nicht sehr interessant. Zwar kann sie beinahe beliebige Kontaktprobleme in bestmöglicher Qualität darstellen; doch der dafür erforderliche immense Rechenaufwand, insbesondere bei dynamischen Simulationen von Modellen mit zahlreichen Kontakten, stellt ein Ausschlusskriterium für die Anwendung in der MKS-Welt dar.

Die beiden Oberflächenmodelle ergeben ein recht ausgewogenes Bild. Gegenüber der in MKS-Programmen üblichen eindimensionalen Modellierung liegt ihr wesentlicher Vorteil in ihrer flächigen Wirkungsweise, durch die auch unsymmetrische Spannungsverteilungen, Mehrpunktkontakt und Schmiegun korrekt behandelt werden. Während die Halbraumapproximation ausgesprochen hohe Modellqualität bei eindeutiger Parametrierung bietet, sprechen Effizienz, Komplexität und Robustheit für das Randschichtmodell.

Für bestimmte Anwendungen stellen eindimensionale Modelle die optimale Kontaktmodellierung dar. Die Verwendung von Kraftelementen ist im MKS-Bereich Standard und sehr weit entwickelt. Der Starrkörperkontakt weist ein vergleichsweise schlechtes Verhältnis zwischen Aufwand und Qualität auf: Die Annahme starrer Körper und Stoßhypothesen sind oft unzulässige Vereinfachungen und gehen mit erheblichen Schwierigkeiten durch ein strukturvariantes System und die Herstellung konsistenter

Kontaktzustände einher. Beide Methoden werfen außerdem mitunter erhebliche Probleme bei der Ermittlung der Kontaktpunkte und -normalenrichtung auf.“ [Hip04]

Aus dem Vergleich der Kontaktmodelle geht hervor, dass für die Modellierung eines Kontaktes in einem MKS-System eine Kombination aus Oberflächenmodell und Kraftelement sinnvoll ist (Bild 2.1). Das Verfahren der Halbraumapproximation berücksichtigt die Geometrie- und Werkstoffparameter der Kontaktpartner. Dessen Reduzierung auf 1D Kontaktelemente ermöglicht eine einfache Implementierung in vorhandene MKS-Systeme ohne die Modellqualität zu verringern.

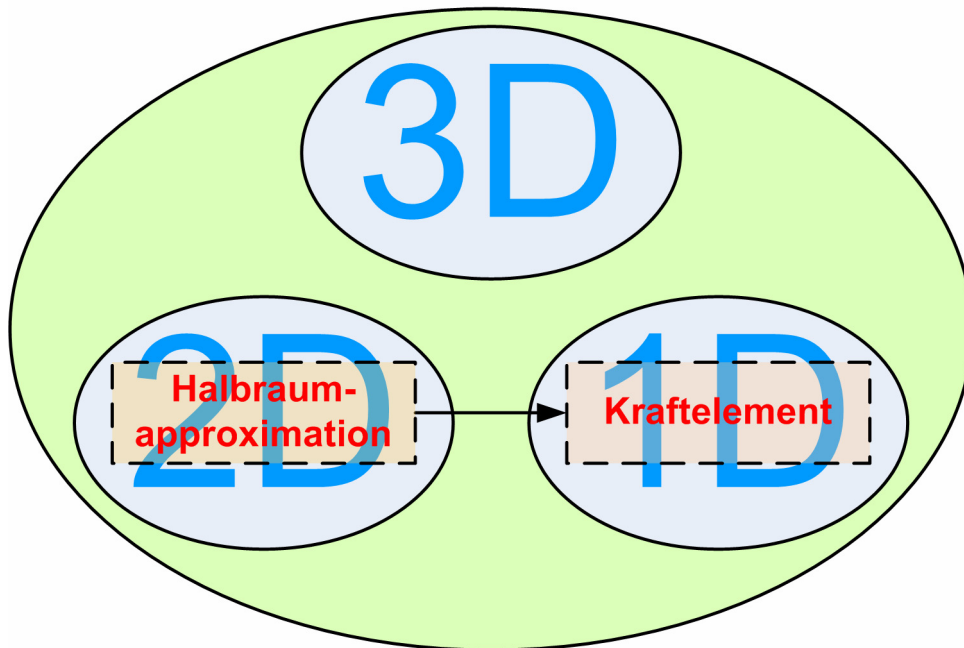


Bild 2.1: Modellreduktion zur Abbildung eines Kontaktes im MKS-System

Im Folgenden wird die Methode der Halbraumapproximation für einen Kontakt zwischen zwei elastischen Körpern mit gekrümmten Oberflächen und Festkörperreibung beschrieben.

3 Beschreibung eines elastischen Kontaktes

Die Modellierung eines elastischen Kontaktes mit Reibung erfordert eine Bestimmung der Normal- und Tangentialkräfte. Für die Kontaktbeschreibung wird die Methode der Halbraumapproximation verwendet. Sie ist für annähernd homogene, isotrope, linear-elastische Körper anwendbar, wenn das Kontaktgebiet relativ klein gegenüber ihren charakteristischen Abmessungen ist. Dann lässt sich das elastische Feld im Nahbereich der Berührungsfläche in guter Näherung durch einen elastischen Halbraum ersetzen [Hip04]. Um die Modellbildung übersichtlich zu gestalten werden Normal- und Tangentialkontakt getrennt behandelt.

3.1 Normalkontakt

Für Kontaktprobleme ohne Reibung ist im Rahmen der Halbraumnäherung nur die Verschiebung senkrecht zur Oberfläche von Interesse. Bei einem kreisförmigen Kontaktgebiet mit Hertzscher Druckverteilung p der Form:

$$p = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2} \quad a \text{ Radius des kreisförmigen Kontaktgebietes} \quad (3.1)$$

ergibt sich die vertikale Verschiebung u_z zu:

$$u_z = \frac{\pi \cdot p_0}{4E^* a} (2a^2 - r^2) \quad p_0 \text{ Pressung im Zentrum des Kontaktgebietes} \quad (3.2)$$

Ein typisches Anwendungsbeispiel ist das punktförmige Berührungsverhältnis zwischen Kugel und Platte in Bild 3.1.

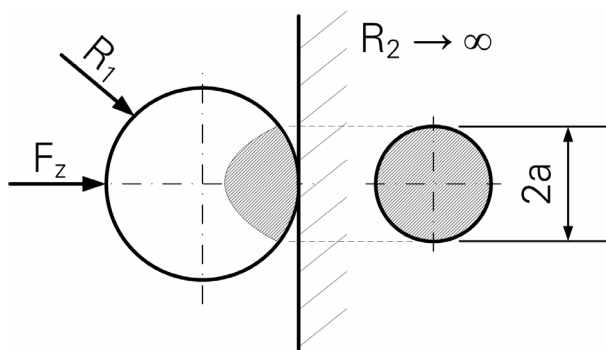


Bild 3.1: Berührungsverhältnis Kugel-Platte bei Hertzscher Pressung

Sind beide Körper elastisch und besitzen unterschiedliche E-Module, muss folgender Ersatzmodul E^* benutzt werden:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (3.3)$$

Die Gesamtkraft F_z ist das Integral des Drucks über der kreisförmigen Kontaktfläche.

$$F_z = \int_0^a p(r) 2\pi r dr = \frac{2}{3} p_0 \pi a^2 \quad (3.4)$$

Versucht man die Parameter a und p_0 so zu wählen, dass die Hertzsche Druckverteilung gewährleistet ist, folgt nach [Pop09] für den Kontaktradius a

$$a = \sqrt{Rd} \quad d \text{ max. Eindringtiefe, } R \text{ Berührungsradius} \quad (3.5)$$

und den maximalen Druck p_0

$$p_0 = \frac{2}{\pi} E^* \left(\frac{d}{R} \right)^{1/2} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (3.6)$$

Durch Einsetzen von Gleichung 3.5 und 3.6 in 3.4 erhält man die Gesamtkraft für eine kreisförmige Kontaktfläche in Abhängigkeit der maximalen Eindringtiefe d .

$$F_z = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} d^{3/2} \quad (3.7)$$

Die Theorie der Hertzchen Pressung für Punktberührung liefert das gleiche Ergebnis.

$$F_z = \frac{2}{3} E R^{1/2} d^{3/2} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{E} = \frac{1 - \nu^2}{2E_1 E_2} \quad (3.8)$$

$$E_1 + E_2$$

Die Steifigkeit c_z eines Normalkontaktes zweier elastischer dreidimensionaler Körper wird als Verhältnis von Gesamtkraft zu Eindringtiefe definiert. Für eine Punktberührung kann der Kontakt durch eine entsprechende eindimensionale Beschreibung abgebildet werden.

$$c_z = \frac{F_z}{d} = \frac{4}{3} E^* \sqrt{Rd} \quad (3.9)$$

Handelt es sich um eine Linienberührung (zwei Zylindern mit parallelen Achsen) ist die Kraft linear proportional zur Eindringtiefe und unabhängig vom Krümmungsradius der Zylinder.

$$F_z = \frac{\pi}{8} ELd \quad (3.10)$$

Die Steifigkeit des Linienkontaktes wird nur vom E-Modul und der Berührungslänge L bestimmt.

$$c_z = \frac{F_z}{d} = \frac{\pi}{8} EL \quad (3.11)$$

3.2 Tangentialkontakt

Werden zwei Körper mit verschiedenen elastischen Eigenschaften in Kontakt gebracht, so entsteht im Kontakt infolge der Querkontraktion eine relative Verschiebung in tangentialer Richtung, die Schubspannungen verursachen. Nur bei einem Normalkontaktproblem von

zwei Körpern mit gleichen elastischen Eigenschaften spielen Schubspannungen keine Rolle, da beide Körper sich seitlich auf die gleiche Weise dehnen.

3.2.1 Tangentialkontakt ohne Gleiten

Besitzen die Kontaktpartner unterschiedliche elastische Eigenschaften, wirken gleichzeitig Tangential- und Normalkräfte, ohne dass ein Gleiten auftritt. Wird zwischen den beiden Körpern trockene Reibung nach dem Coulombschen Reibgesetz angenommen, ist die maximale Haftreibungsspannung τ_{\max} gleich der Normalspannung p multipliziert mit einem konstanten Reibungskoeffizienten μ [Pop09]. Die Haftbedingung lautet:

$$\tau_{\max} = \mu \cdot p \quad (3.12)$$

Unter der Annahme, dass die Körper im Kontaktgebiet vollständig haften und kreisförmige Berührungsflächen entstehen, werden die in Bild 3.2 dargestellten Verteilungen von Normal- und Tangentialspannungen durch die folgenden Gleichungen beschrieben:

$$p = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2}, \quad F_z = \frac{2}{3} p_0 \pi a^2 = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} d^{3/2} \quad (3.13)$$

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2}, \quad F_x = 2\pi \tau_0 a^2 \quad (3.14)$$

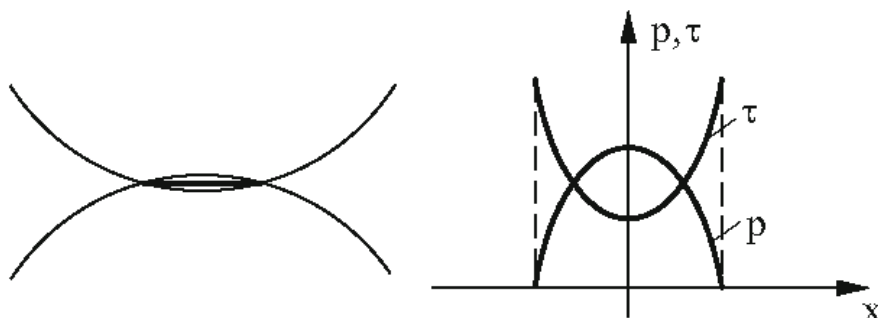


Bild 3.2: Normal- und Tangentialspannungen in einem Haftkontakt [Pop09]

Die tangentialen Verschiebung u_x der Berührungsfläche ist innerhalb des beanspruchten Gebietes konstant.

$$u_x = \frac{\pi(2-\nu)}{4G} \tau_0 a \quad (3.15)$$

Zu bemerken ist, dass die Schubspannung am Rande des Haftgebietes gegen unendlich strebt, während der Normaldruck gegen Null geht. Das bedeutet, dass in den meisten Fällen die Haftbedingung in der Nähe des Randes nicht erfüllt ist und relatives Gleiten entsteht.

Die Schubsteifigkeit c_x eines Kontaktes zwischen zwei elastischen Körpern ist als Verhältnis der tangentialen Kraft zur relativen tangentialen Verschiebung definiert.

$$c_x = \frac{F_x}{2u_x} = \frac{4Ga}{2-\nu} = 2G^* a \quad (3.16)$$

Mit dem effektiven Schubmodul G^* :

$$\frac{1}{G^*} = \frac{2 - \nu_1}{4G_1} + \frac{2 - \nu_2}{4G_2} \quad (3.17)$$

Und dem Druckkreisradius a :

$$a = \sqrt{Rd} \quad (3.18)$$

Genauso wie die Normalsteifigkeit ist auch die Schubsteifigkeit eines dreidimensionalen Kontaktes proportional zum Durchmesser des Kontaktes und kann mit einer eindimensionalen Beziehung nachgebildet werden.

$$c_x = 2G^* \sqrt{Rd} \quad (3.19)$$

3.2.2 Tangentialkontakt mit Gleiten

Typische tribologische Systeme sind dadurch gekennzeichnet, dass in ihnen die Gesetze der trockenen Reibung annähernd erfüllt sind, insbesondere ist die Reibungskraft annähernd proportional zur Normalkraft.

$$F_R = \mu F_N \quad (3.20)$$

Um das Gleiten eines Kontaktes zu berücksichtigen, wird eine maximale Losreißkraft definiert.

$$F_{x \max} = \frac{2\pi}{3} \mu_0 p_0 a^2 = \frac{4}{3} \mu_0 E^* R^{1/2} d^{3/2} = \mu F_z \quad (3.21)$$

Bevor das vollständige Gleiten einsetzt, können die Körper in tangentialer Richtung maximal um

$$u_{x \max} = \frac{3(2 - \nu) \mu_0 F_z}{16Ga} = \frac{3\mu_0 F_z}{8G^* a} \quad (3.22)$$

verschoben werden.

4 Abbildung des elastischen Kontakts im MKS-System

Zur Analyse von Kontaktvorgängen in MKS-Systemen kommen meist Krafterelemente zum Einsatz. Sie bestehen meist aus einer Parallelschaltung von Feder und Dämpfer.

4.1 Normalkontakt

Die Kontaktnormalkraft wird anhand des Abstands und der Relativgeschwindigkeit der beiden Koppelpunkte entlang der Normalenrichtung bestimmt. In den meisten Fällen besitzt das Feder-Dämpfer-Element ein lineares Verhalten mit konstanten Steifigkeits- und Dämpfungsparametern c_z und b_z . Die Gesamtkraft der Kontaktstelle F_z ist die Summe aus Federkraft F_F und Dämpfungskraft F_D .

$$F_z = F_F + F_D = c_z d_z + b_z v_z \quad (4.1)$$

Eine wesentlich bessere Abbildung eines kreisförmigen Kontaktgebietes liefert die aus der Hertzchen Pressung abgeleitete nichtlineare Steifigkeitskennlinie aus Abschnitt 3.1.

$$c_z = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R d_z} \quad (4.2)$$

Die Dämpfung der Kontaktstelle wird in Abhängigkeit der Steifigkeit angegeben.

$$b_z = k \sqrt{c_z} \quad \text{mit } k = 0,005 \dots 0,02 \quad (4.3)$$

Dabei ist darauf zu achten, dass beim Ausfedern keine Zugkraft auftreten darf. Wenn der Betrag der Federkraft kleiner als die Dämpfungskraft wird, muss der Kontakt gelöst werden (Gesamtkraft=0), ansonsten tritt ein Kleben des Anschlags auf.

4.2 Tangentialkontakt

Der Tangentialkontakt muss sowohl Haften als auch Gleiten berücksichtigen. Hier bietet sich die ereignisgesteuerte Parallelschaltung eines Krafterelementes mit einem Reibelement an. Im Haftzustand ist das Krafterelement (Feder-Dämpfer-Element) aktiv:

$$F_x = F_F + F_D = c_x d_x + b_x v_x \quad (4.4)$$

mit

$$c_x = 2G^* \sqrt{R d_x} \quad (4.5)$$

und

$$b_x = k \sqrt{c_x} \quad \text{mit } k = 0,005 \dots 0,02 \quad (4.6)$$

Das Umschalten zwischen Haft- und Gleitreibung wird beim Überschreiten der maximalen Losreißkraft definiert.

$$F_{x\max} = \frac{2\pi}{3} \mu_0 p_0 a^2 = \frac{4}{3} \mu_0 E^* R^{1/2} d^{3/2} = \mu F_z \tag{4.7}$$

Im Gleitzustand sorgt das Reibelement für die Einhaltung des Coulombschen Reibgesetzes:

$$F_R = \mu F_N \tag{4.8}$$

Dieses Kraftgesetz wird als Bürstenmodell mit Mikroschlupf bezeichnet und eignet sich auch zur Darstellung von dauerhaften Haftzuständen und Stick-Slip-Effekten. In Bild 4.1 ist das Modell eines dreidimensionalen elastischen Kontaktes mit Festkörperreibung dargestellt.

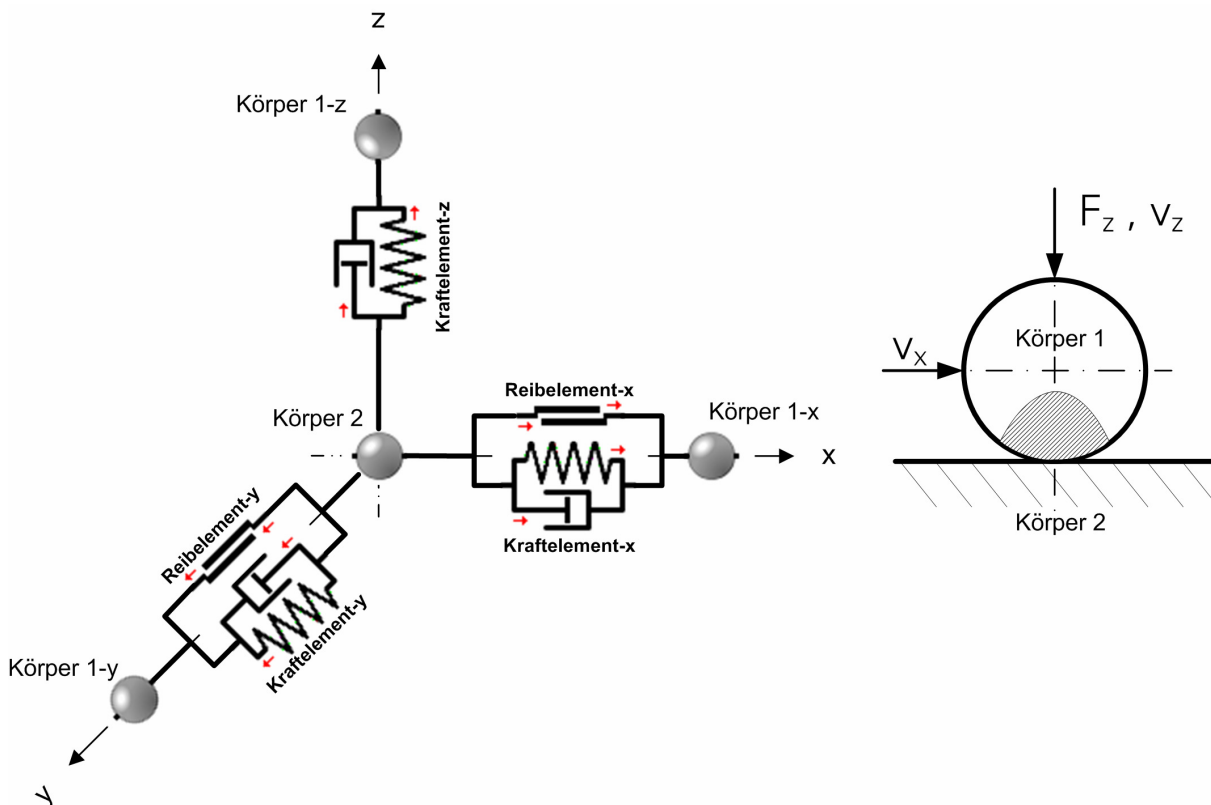


Bild 4.1: Modell eines dreidimensionalen elastischen Kontaktes in einem MKS-System

5 Zusammenfassung

Durch die Bestimmung der Steifigkeiten in allen drei Koordinatenrichtungen kann ein räumlicher elastischer Kontakt mit eindimensionalen Kraftelementen beschrieben werden, der ein Hertzsches Verhalten besitzt. Die Steifigkeit des Kontaktes ist abhängig von den Werkstoffparametern, der Geometrie und der Eindringtiefe. Die Kontaktmodellierung mit Kraftelementen bleibt qualitativ natürlich hinter Oberflächen- oder Festkörpermodellen zurück. Dennoch liefert die Reduktion der Berührungsfläche auf einen Punktkontakt für spezielle Anwendungen (z. B. Hertzscher Kontakt mit Festkörperreibung) optimale Ergebnisse bei minimalem Aufwand.

Literatur

- [Hip04] Hippmann, G.: Modellierung von Kontakten komplex geformter Körper in der Mehrkörperdynamik. Dissertation. Institut für Mechanik und Mechatronik, Technische Universität Wien: 2004
- [Pop09] Popov, V.: Kontaktmechanik und Reibung. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2009
- [Sti01] Stieglmeyer, A.: Zur numerischen Berechnung strukturvarianter Mehrkörpersysteme. Fortschritt-Bericht-VDI, Reihe 18, Nr271, Düsseldorf: VDI-Verlag, 2001
- [STM09] Skriptum zur Vorlesung "Technische Mechanik III". Lehrstuhl für Mechanik, Universität Duisburg-Essen: 2010